namics as macroscopic manifestation of underlying many-body field dynamics," *Physics of Life Reviews 3*, 2006, 93-118; G. Vitiello, "Essere nel mondo: Io e il mio Doppio," *Atque* 5, 2008, 155-176; G. Vitiello, "The dissipative brain," in G. G. Globus, K. H. Pribram, G. Vitiello (eds.), *Brain and Being. At the boundary between science, philosophy, language and arts*, Amsterdam, John Benjamins Publ. Co., 2004, 315-334; G. Vitiello, *My double unveiled*, Amsterdam, John Benjamins Publ. Co., 2001; W. J. Freeman, G. Vitiello, "Matter and Mind are entangled in two streams of images that guide behavior and inform the subject through awareness," *Mind and Matter 14(1)*, 2016, 7-24; G. Vitiello, "Brain and the aesthetical mind," *Links-Series 3-4*, 2019, 146-150. http://links-series.com/wp-content/uploads/2019/11/LINKs3-4.pdf. For the extension to theoretical computer science see G. Basti, A. Capolupo, G. Vitiello, "Quantum field theory and coalgebraic logic in theoretical computer science," *Progr. in Biophysics and Mol. Biology 130*, 2017, 39-52.

[15] C. Darwin, *On the Origin of Species*, London, John Murray, 1860, 490.

Localité et globalité

Jean-Paul Allouche[1]

Alors que l'emploi des mots « local » et « global » est de plus en plus fréquent, nous nous interrogeons sur les raisons explicites ou cachées qui favorisent l'usage de l'un ou l'autre de ces concepts.

Quel lien existe-t-il entre les notions de localité et de globalité : complémentarité ou antonymie ? Le premier champ que nous questionnons est celui des mathématiques, où, à défaut d'être toujours explicitement définies, elles ont souvent un sens précis pour ceux qui les utilisent ou les manient. Ce qui semble le plus frappant est que le passage en douceur de l'un à l'autre de ces deux mots cache souvent des théorèmes dont la démonstration est loin d'être immédiate, comme le suggèrent peut-être les trois exemples qui suivent. Le premier résultat de ce type est le fait que *le corps C est algébriquement clos*. Que signifie cet énoncé ? On apprend au collège ou au lycée qu'un carré est toujours positif ou nul, donc, en particulier, que -1 n'est pas un carré, autrement dit que l'équation polynomiale $x^2 + 1 = 0$ n'a pas de racine. Les mathématiciens, qui aiment bien transgresser les règles pour en établir de plus générales, ont décidé (la réalité historique est un peu différente) de « forcer » cette équation à avoir une solution, notée « i », et de voir où cela pourrait mener. Sans surprise, et en tentant de respecter autant que possible les règles habituelles malgré l'incongruité d'avoir maintenant une racine carrée du nombre -1, ils constatent (démontrent) qu'avec le nouveau nombre i apparaissent « l'autre » racine carrée de -1, a savoir -i, puis tous les nombres de la forme a + bi où a et b sont des nombres réels (autrement dit les nombres que l'on manipule habituellement comme 2, -3/4, √2, *etc.*). Puis ils constatent que les opérations habituelles menées sur ces nombres n'en créent pas de nouveaux : l'ensemble de ces nombres est appelé le *corps des nombres complexes* (le mot *corps* signifiant que l'on peut mener des calculs avec les quatre opérations comme d'habitude, sans oublier l'interdiction de diviser par zéro ; le mot *complexe*, lui, n'étant pas là pour décourager les Béotiens, mais seulement (?) pour signifier qu'il ne s'agit pas des nombres ordinaires). En un certain sens, cet ensemble de nombres semble conçu pour résoudre un problème localisé, à savoir permettre que le polynôme $x^2 + 1$ ait une racine (à savoir i). Or ceci implique non seulement que ce polynôme a maintenant deux racines (i et -i), mais encore – et c'est là un résultat superbe appelé parfois théorème fondamental de l'algèbre – que tout polynôme de degré d à coefficients réels a d racines distinctes ou partiellement confondues dans le corps C, et même mieux : ceci est vrai pour tout polynôme à coefficients complexes (on dit donc que C est *algébriquement clos*). Ainsi un modeste ajout (celui de i) qu'on peut voir comme la résolution d'une question très localisée entraîne-t-il une propriété globale : on obtient *ipso facto* et sans l'avoir voulu une explosion de cette propriété qui s'étend de manière globale bien plus loin que la question fondatrice.

Un deuxième exemple est la construction des nombres réels (comme √2) à partir des nombres rationnels (les quotients de nombres entiers). Imaginons qu'on veuille calculer un nombre dont le carré vaut 2 (noté √2) par approximations successives, soit par un algorithme itératif « efficace » fondé sur la méthode de Newton, soit par un procédé qu'on n'apprend plus guère à l'école (où l'on a une « potence » semblable à celle qu'on utilise pour la division, *etc.*). On construit alors des approximations rationnelles par défaut et par excès de √2, par exemple :

$$1 < \sqrt{2} < 2$$
$$1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$$
$$1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$$
$$1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$$
$$\ldots$$

Les encadrements écrits signifient que s'il existe un nombre qui a 2 pour carré, il est compris entre 1 et 2, puis entre 1,4 et 1,5, puis entre 1,41 et 1,42, *etc.* Ces deux suites de rationnels semblent *converger* vers (se rapprocher de plus en plus de) « quelque chose » qui n'est pas un nombre rationnel (ce qu'on sait depuis les textes d'Aristote). Mais vers quoi convergent-elles ? Soucieux de précision, les mathématiciens (là encore je simplifie la réalité historique) constatent que la suite 1 1,4 1,41 1,414... a la propriété que ses termes sont tous arbitrairement proches les uns des autres dès que leurs indices sont suffisamment grands : on peut aussi formuler cette propriété en disant que si on se donne un intervalle, aussi petit que l'on veut, tous les termes de la suite y sont enfermés dès que leurs indices sont assez grands. De telles suites sont appelées *suites de Cauchy*. Notons que toute suite *qui tend vers une limite* (par exemple 1 1,1 1,11 1,111… qui tend vers 10/9, c'est-à-dire qui s'approche de plus en plus de la valeur 10/9) est une suite de Cauchy, mais que la réciproque n'est pas vraie, comme le montre l'exemple des approximations 1,414... ci-dessus. Que faire alors ? Les mathématiciens *décident* que les suites de Cauchy *sont* de nouveaux nombres (à l'identification près de deux telles suites lorsque leur différence tend vers 0, c'est-à-dire devient aussi proche de 0 que l'on veut pourvu que l'on prenne des indices assez grands) et obtiennent ainsi (après démonstration rigoureuse) un ensemble de *nouveaux nombres*, qui contient les rationnels et tous les nombres que l'on peut obtenir (comme √2) par ce procédé appliqué aux nombres rationnels. Et cette résolution d'une question somme toute locale, explose, car on montre ensuite que les suites de Cauchy fabriquées à partir de ces nouveaux nombres ne donnent rien de nouveau si on leur applique le même procédé. Une sorte de « saturation » inattendue *a priori* permet d'obtenir plus que ce qu'on espérait.

Un dernier exemple, avant de clore cette partie aux allusions mathématiques, est celui des fonctions *holomorphes*. Une courbe *continue* (la signification intuitive de cette notion est qu'on peut tracer la courbe sans lever le crayon de la feuille) peut admettre des tangentes en certains points (une tangente en un point est obtenue en prenant une sécante entre ce point et un autre point de la courbe et en faisant tendre ce deuxième point vers le premier). Lorsque la courbe est la représentation d'une fonction, la pente de la tangente en un point est la dérivée de la fonction en ce point (c'est-à-dire la limite du rapport entre l'accroissement de la fonction et celui de la variable). Tangente et dérivée peuvent ne pas exister (penser aux points où une ligne brisée… se brise). Il y a même des fonctions longtemps considérées comme monstrueuses qui sont continues et nulle part dérivables. Le fait pour une fonction d'être dérivable en un point est *local* et ne dépend que des propriétés de la fonction au voisinage de ce point. Maintenant, si une fonction est dérivable sur un voisinage d'un point, on peut se demander si la dérivée est elle-même dérivable, puis si cette dernière dérivée (dérivée *seconde*) est elle-même dérivable et ainsi de suite, *ad infinitum*. Bien sûr, il n'y a aucune raison qu'une dérivée soit dérivable, *etc.* Prenons maintenant une fonction qui va des nombres complexes vers les nombres complexes déjà évoqués plus haut. On peut s'intéresser là aussi à la limite du rapport entre l'accroissement de la fonction et celui de la variable. Si cette limite existe en un point, on dit que la fonction est holomorphe en ce point. Cette notion généralise – de manière apparemment innocente – la notion de dérivée. Et voilà qu'une propriété incroyable tombe du ciel, on démontre que si une fonction est holomorphe au voisinage d'un point, elle y est indéfiniment dérivable (et même analytique, ce qui est une propriété encore plus forte que nous ne détaillerons pas ici). Une fois de plus, une généralisation en apparence ponctuelle locale, formelle, donne beaucoup plus que ce que l'on imaginait, et possède une propriété globale proprement inouïe.

Cherchons maintenant des exemples de cette dualité global-local dans la vie courante. Notre thèse est que cette dualité a deux champs d'application politique. Le premier, sur lequel nous ne nous étendrons pas, est bien classique : l'économie doit-elle / peut-elle être globalisée ou doit-elle / peut-elle rester locale ? Cette question se pose autant pour la production agricole que pour la production industrielle ou les échanges commerciaux, *etc.* Mais qu'en est-il dans le champ de l'information et plus particulièrement de la quantité d'information disponible ? Alors qu'on prône la communication tous azimuts, mondiale, et sans limite, on assiste à un appauvrissement (volontaire ?) de l'information fournie. Prenons quelques exemples : si l'on cherche les prévisions météorologiques dans un quotidien régional, on va trouver le plus souvent les prévisions du département et peut-être celles des départements voisins. Si l'on prend un quotidien national, on aura, pour certains d'entre eux, seulement les prévisions nationales, pour d'autres quelques renseignements internationaux. Bien sûr, ceci est lié à la place disponible (nous y reviendrons), mais aussi peut-être à l'idée qu'à Vierzon, personne ne s'intéresse aux risques de neige à Sydney. Comment cette idée est-elle justifiée ? Par la certitude que personne à Vierzon ne s'attend à trouver dans son quotidien la météo de Sydney et qu'on ira si besoin chercher les renseignements ailleurs ? Ou par la quasi-certitude – peut-être inconsciemment méprisante – qu'en habitant Vierzon, on n'a aucune chance de prévoir un voyage a Sydney, fût-il professionnel ? Voire par la *volonté* de décourager les gens qui habitent à Vierzon de s'intéresser à Sydney ?

Intéressons-nous maintenant aux autobus urbains. Il n'y a pas si longtemps, dans beaucoup de villes, y compris à Paris, on trouvait dans chaque bus un schéma de l'itinéraire suivi par le bus avec toutes les stations. Dorénavant, dans de plus en plus de bus, un affichage électronique (donc nécessairement plus restreint ?) indique en temps réel les trois ou quatre prochains arrêts. Impossible de savoir, donc, lorsque l'on n'est pas un habitué de la ligne, si on a dépassé son arrêt dans un moment de distraction, ou s'il reste dix-sept ou quatorze arrêts avant la station où l'on a l'intention de descendre.

Prenons maintenant notre GPS favori : arrivés à un rond-point, on nous dira par exemple qu'il faut sortir à la quatrième sortie. Pourquoi ne pas préciser aussi qu'en fait on va presque tout droit, ou qu'on tourne en gros à gauche ? Les irréductibles de la carte routière auraient eux aussi leur mot à dire sur la parcellisation de ce type d'information. J'ai même vu une fois dans une ville de province des jeunes gens le nez sur leur GPS, qui, une fois arrivés dans la rue qu'ils cherchaient, continuaient à regarder leur appareil pour savoir où était le numéro où ils voulaient aller, alors que la rue devait avoir cinquante mètres de long et qu'il suffisait de lever les yeux.

Je parlais de la place nécessaire pour fournir une information complète. Voire ! Ainsi pouvait-on trouver il y a quelques années des horaires papier pour les trains de la SNCF entre deux villes avec tous les trains pour une période de plusieurs mois (il existait même, à une époque moins récente, une petite brochure intitulée « trains d'affaires » qui répertoriait tous les trains pratiques entre la plupart des grandes villes). Un beau jour, les horaires papier de ville à ville disparurent. Aux doléances des usagers, les agents de la SNCF répondaient que cela économisait du papier, et que tout était

maintenant sur le site internet de la SNCF. En fait non ! Sur le site, on doit indiquer quel jour et dans quelle tranche horaire on veut voyager. Si l'on ne sait pas encore exactement, il faut faire une recherche pour chaque tranche de chaque jour pour avoir une idée *globale*, alors qu'on pouvait se faire une idée immédiate avec la brochure papier. Pourtant, comment ces brochures étaient-elles confectionnées ? On imagine volontiers qu'un programme moulinait l'ensemble des données horaires et sortait l'information demandée. Dès lors, qu'est-ce qui empêchait la SNCF de fournir *en ligne* un fichier pdf avec ces horaires ? Non seulement on économisait ainsi du papier, mais encore mettre ledit programme à disposition sur le site aurait permis d'engendrer des fiches horaires qui n'avaient sans doute jamais existé, par exemple pour les trains entre Vierzon et Dinard, avec les changements éventuels, sur une période de trois mois. Je ne résiste pas, d'ailleurs, à indiquer qu'après la disparition des horaires papier, je pris l'habitude d'aller sur le site de la Deutsche Bahn, qui pendant un temps donnait les horaires globaux entre villes (y compris entre villes françaises), *à condition de penser à aller sur le site en allemand, car le site en français ne les fournissait pas*. La Deutsche Bahn a depuis supprimé, semble-t-il, cette possibilité. Pour être complet, je dois indiquer que certains des horaires globaux dont je parle se trouvent parfois aux changements d'été ou d'hiver sur des « blogs de lignes » confidentiels.

Si les exemples ci-dessus des itinéraires de bus, des horaires de train ou des GPS à courte vue n'ont semble-t-il pas soulevé de questions, il n'en est peut-être pas de même pour la question des « big data » (en français « données massives »). Amasser, de manière souvent non transparente, des données, en apparence locales donc semblant négligeables, pour en faire un monstre global est d'autant plus menaçant que le commun des mortels ignore qui les consulte et ce qu'on peut en faire. Le « tracing » (en français le « pistage »), destiné à éviter l'apparition de « clusters » (en français de « foyers ») lors d'une épidémie, soulève la même méfiance : comment éviter la pérennisation d'un tel dispositif une fois l'épidémie terminée, et comment empêcher une exploitation des données récoltées, avec d'autres buts ? Comme le rappellent les graphistes Ruedi Baur et Odyssée Khorsandian dans un des dessins de leur série pour réfléchir à la démocratie face à la crise du Covid-19 [parus dans *Libération*, 2 mai 2020, n.d.r.] :

> *« Le risque de récupération de ces outils à d'autres fins que celles liées à la sécurité sanitaire est évident. Faut-il rappeler que les arrestations de juifs et de résistants par le régime de Vichy en 1940 furent facilitées par la récupération des outils de surveillance et de répression mis en place par le gouvernement démocratique de Daladier. »*

Les exemples donnés plus haut pourraient indiquer une volonté *politique* de restreindre l'*information disponible*, un peu comme avec des œillères, souvent électroniques, tout en favorisant l'accumulation de masses de données gigantesques : il est plus facile de gouverner des gens qui n'ont qu'une information partielle sur ce que les gouvernants « savent », et ce dans le plus grand nombre de domaines possibles ; *gouverner* devient synonyme de *décider en limitant les possibilités de questionner donc de contester*… Dans le même temps, les moyens de communication modernes déversent sur le citoyen ordinaire une quantité phénoménale d'informations dont une grande partie n'est pas vérifiée ou bien volontairement maquillée ou travestie (avec en particulier les fameuses *fakenews*, en français *infox*). Si l'on continue dans cette vision de contrôle de l'information, on passe ainsi – et peut-être avec le même but – d'informations distillées au compte-gouttes pour que les individus gardent « la tête dans le guidon », à une logorrhée d'informations dont la finalité pourrait être, en détournant le titre d'un film de Peter Greenaway : *Drowning by numbers*.

[1]CNRS, IMJ-PRG, Sorbonne Université, jean-paul.allouche@imj-prg.fr